Chap. 6. Elements de base de la géometrie

Hatier T1 p217

① ASPECTS MATHEMATIQUES

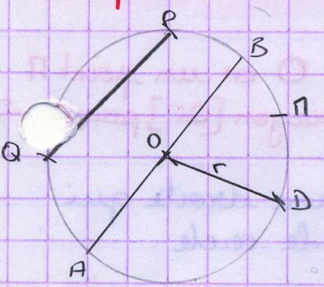
I. Droite - Demi-droite - Segment.

Objet	DROITE	DEMI-DROITE d'origine A passant par B	SEGMENT d'extremités A et B
Dessin	(AB) (d)	A B	A B
Symbole	(AB) ou (d)	[AB)	[AB]

- Deux segments de même longueur sont identifiés par

II CERCLE

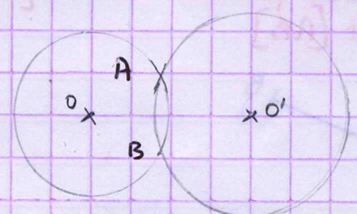
Soit r un nombre positif, le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à une distance r de O. On le note $\mathcal{C}(O,r)$



- si M un pt sur le cercle de centre O et rayon r alors OM = r.
- si M tq OM = r alors M est sur le cercle de centre O et rayon r
- Disque de centre O et rayon r est l'ensemble des pts M tq OM < r
- [OD] est un rayon du cercle
- [AB] est un diamètre du cercle
- [PQ] est une corde du cercle
- $\overset{\frown}{PQ}$ = arc de cercle de la portion de cercle limitée par P et Q

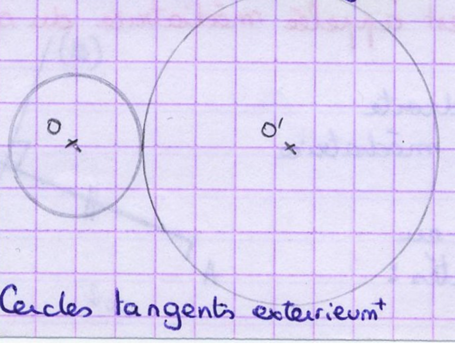
Deux cercles sont dits concentriques s'ils ont même centre

- Position relatives de deux cercles

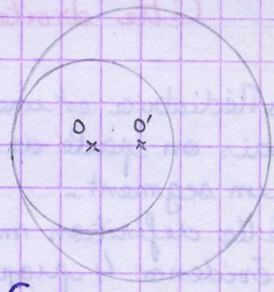


Deux cercles sont secants s'ils se coupent en deux points

Deux cercles sont tangents s'ils ont 1 seul point d'intersect°



Cercles tangents exterieurem^t



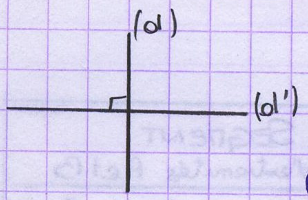
Cercles tangents interieurem^t

6.1

III. Des droites particulières

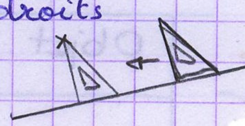
1. droites perpendiculaires

Deux droites sont perpendiculaires si elles forment 1 angle droit
On note alors que $(d) \perp (d')$



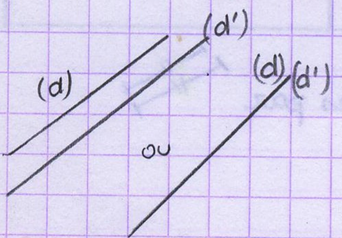
- Si deux droites sont perpendiculaires, elles déterminent alors quatre angles droits

(méthode 1 : en faisant glisser l'équerre)

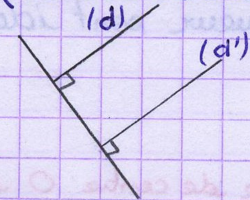


2. deux droites parallèles.

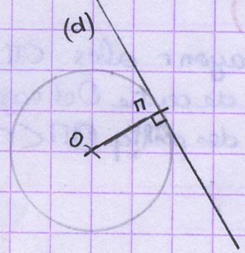
Deux droites sont parallèles si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun pt com
On note alors que $(d) // (d')$



(méthode 1 : en utilisant l'équerre)



→ alors $(d) // (d')$



3. Tangente à un cercle

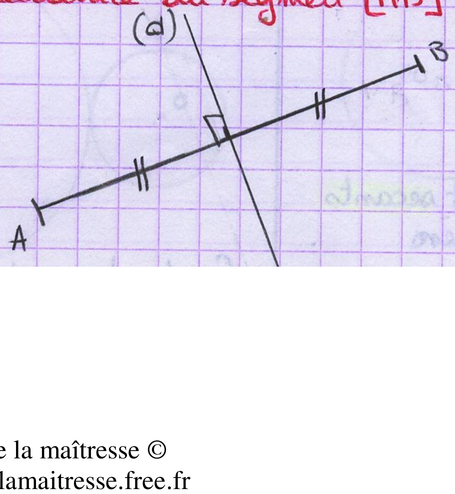
La tangente à un cercle de centre O en un point M est la droite perpendiculaire au rayon [OM] passant par M

→ Méthode de tracé précis de la tangente = C'est une droite qui n'a qu'un seul point commun avec le cercle.

4. Médiatrice d'un segment.

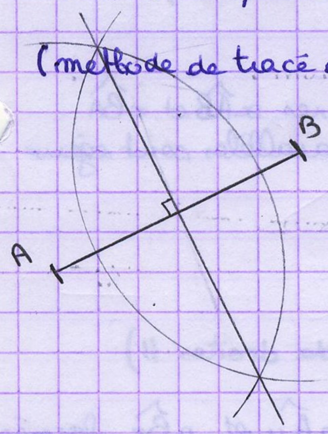
On admet que l'ensemble des points équidistants de deux points A et B est une droite qui est perpendiculaire à (AB) et qui passe par le milieu de [AB]
Cette droite est appelée médiatrice du segment [AB]

⚠ Médiatrice est une droite mais on parle de la médiatrice d'un segment.
Cette définition met en évidence 4 propriétés :



- Si un point est équidistant des extremités d'un ségment, alors il est sur la médiatrice de ce segement
- Si un point est sur la médiatrice d'un ségment, alors il est équidistant de ce segment
- Si une droite est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu de [AB] alors c'est la médiatrice de [AB]
- Si une droite est la médiatrice d'un ségment [AB] alors elle est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu de [AB].

(methode de tracé de la médiatrice) ↳ ac regle graduée et équerre
↳ ac compas et regle non graduée



1) on trace un arc de cercle de centre A et de rayon > à $\frac{AB}{2}$
2) on trace un second arc de cercle de centre B et de m̂ rayon
↳ ces arcs se coupent en deux points
3) La droite joignant ces deux points est la médiatrice de [AB]

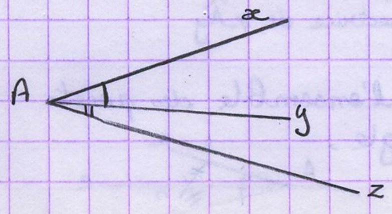
4. Angles

On appelle angle toute portion de plan limitée par deuse demi-droites de même origine.

- un angle est aigu s'il est plus petit qu'un angle droit < 90°
- un angle est obtus s'il est compris entre 1 angle droit et un angle plat ↳ 90 < obtus < 180°
- un angle est saillant s'il est inferieur à un angle plat
- un angle est rentrant s'il est superieur à un angle plat.

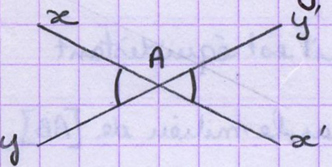
- le sommet est toujours en seconde position ex angle $\widehat{ABD}$
- un angle se mesure avec un rapporteur

- 2 angles sont complémentaires si ~~leur somme~~ est égale à 90°
- 2 angles sont supplementaires si leur somme est égale à 180°
- 2 angles sont adjacents s'ils ont 1 sommet et 1 côté communs et s'ils sont situés de part et d'autres de ce côté.



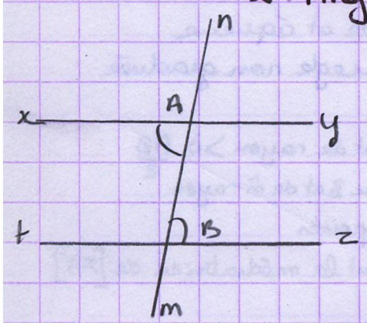
les angles $x\widehat{A}y$ et $y\widehat{A}z$ sont adjacents

1. Angles opposés par le sommet



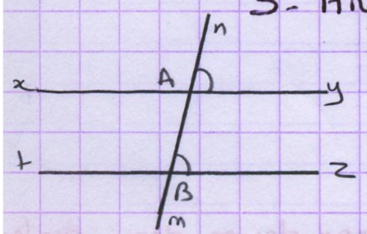
Les angles $x\hat{A}y$ et $x'\hat{A}y'$ sont opposés par leur sommet. Ils ont leur sommet en commun et leurs côtés st ds le prolongement l'un de l'autre.
Deux angles opposés par le sommet sont égaux

2. Angles alternes-internes (ds le cas de droites //)



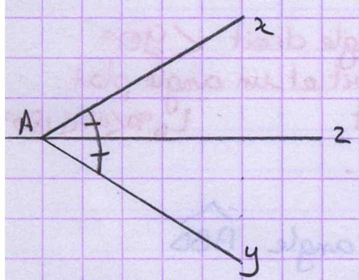
Les angles alternes-internes $x\hat{A}B$ et $z\hat{B}A$ formés par des droites parallèles sont égaux

3. Angles correspondants (ds le cas de droites //)



Les angles correspondants $n\hat{A}y$ et $n\hat{B}z$ formés par des droites parallèles sont égaux.

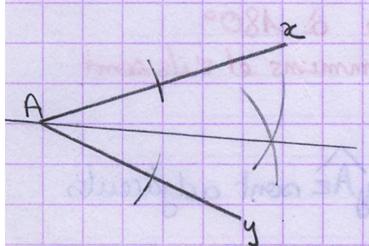
4. Bissectrice d'un angle.



La bissectrice d'un angle est la droite qui passe par le sommet de l'angle et qui partage l'angle en deux angles égaux : $x\hat{A}z = z\hat{A}y$

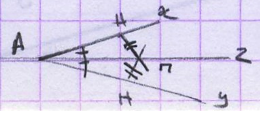
NB : La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle

(méthodes de tracé → ac le rapporteur
→ en utilisant la règle et le compas)

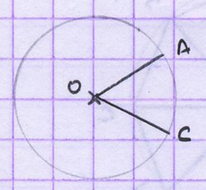


1) on trace 1 arc de cercle de centre A, il coupe [Ax) et [Ay) en 2 pts
2) on trace 2 arcs de cercle de m rayon, dt les centres sont ces pts d'intersecti°
3) la demi droite d'origine A et qui passe par un point d'intersection de ces deux arcs est la bissectrice de $x\hat{A}y$

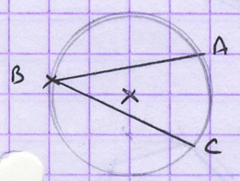
La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des côtés de l'angle.



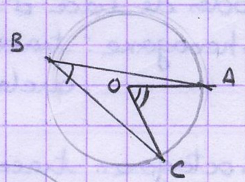
5. Angles au centre et angle inscrit



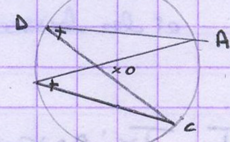
On appelle angle au centre, dans un cercle, tout angle dont le sommet est le centre du cercle : $\widehat{AOC}$ est un angle au centre, il intercepte l'arc $\widehat{AC}$



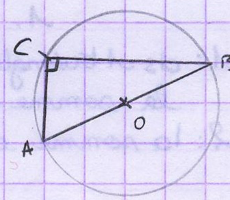
On appelle angle inscrit dans un cercle, tout angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle : $\widehat{ABC}$ est angle inscrit. Il intercepte l'arc $\widehat{AC}$



Propriete 1 : Si un angle inscrit $\widehat{ABC}$ intercepte le même arc qu'un au centre $\widehat{AOC}$
Alors : $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$



Propriete 2 : Si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ils sont égaux
alors : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$



Propriete 3 : Si [AB] est un diamètre d'un cercle et C un point de ce cercle alors $\widehat{ABC}$ est un triangle rectangle en C.

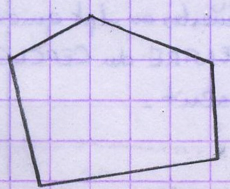
V. Polygones.

Un polygone est une figure géometrique limitée par des côtés qui st ts d segmets

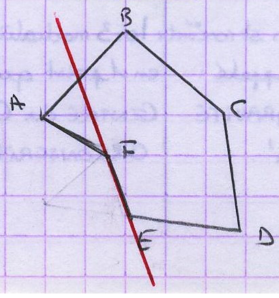
à 3 côtés : triangle	8 côtés : octogone
4 côtés : quadrilatère	10 côtés : décagone
5 côtés : pentagone	12 côtés : dodécagone
6 côtés : hexagone	

1. Polygone convexe, concave, croisé.

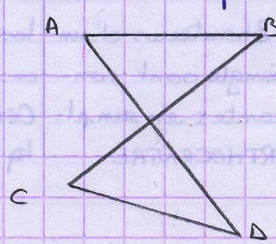
Convexe : si il est tout entier situé du m̂ côté de tte les droites support de ses côtés



Concave

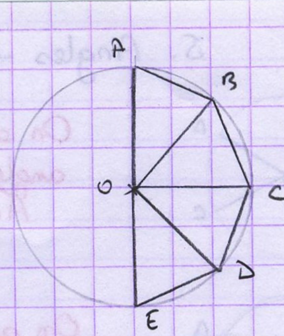


Croisé : si deux de ses côtés se coupent



6.5

2. Polygone regulièr

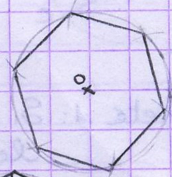


Un polygone regulièr est inscriptible dans un cercle, et qui a tous ses cotés égaux.
Un polygone regulièr a tous ses angles égaux

Csq : si ABCDE est un polygone regulièr de n côtés et si O est le centre du cercle ~~inscrit~~ alors :

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \dots = \frac{360°}{n}$

Méthodes de tracé d'un polygone regulièr sans rapporteur



- hexagone : tracer 1 cercle, puis reporter successivem^t sur ce cercle des cordes egales au rayon.
- octogone : tracer 1 cercle ac 2 diamètres perpendiculaires et les bissectrices des 4 angles formés

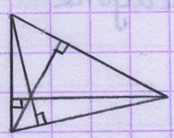
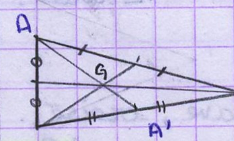
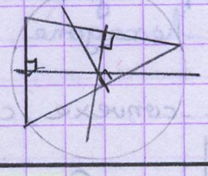
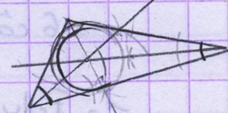
VI. TRIANGLES

1. Caracteristiques d'un triangle

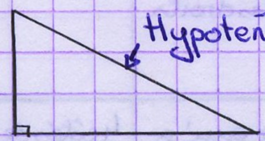
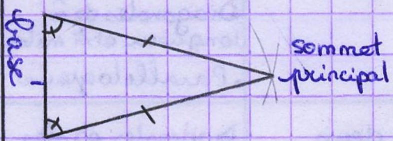
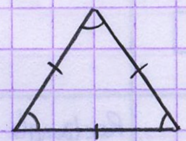
Proprieté 1 : ds 1 triangle, la longueur de n'importe quel côté est inferieure à la somme des deux autres > Inégalité triangulaire

Proprieté 2 : la somme des angles d'un triangle est égale à 180°

2. Droites particulières d'un triangle

	HAUTEUR	MEDIANE	MEDIATRICE	BISSECTRICE
Déf	c'est la droite perpendiculaire à un côté qui passe / le sommet opp	droite qui passe par le milieu d'un côté et le sommet opposé	c'est la mediatrice d'un de ses côtés	c'est la bissectrice d'un de ses cotés
Tracé				
Propriété	les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes en un pt : ORTHOCENTRE	les 3 médianes st concurrentes en un point appelé : CENTRE DE GRAVITÉ tq $AG = \frac{2}{3} AA'$	les 3 mediatrices st concourantes en 1 point qui est le CENTRE du CERCLE CIRCONSCRIT au Δ	les 3 bissectrices st concourantes en 1 pt qui est le CENTRE du CERCLE Inscrit.

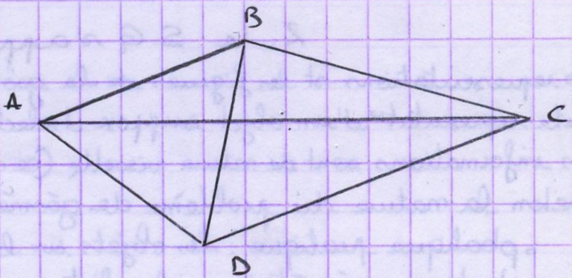
3. Triangles particuliers

	Triangle Rectangle	Triangle Isocèle	Triangle Equilatéral
Tracé			
Déf°	Triangle ayant 1 angle droit le coté opp à l'L est l'hypoténuse	Triangle ayant deux côtés égaux	Triangle ayant trois côtés égaux
Propriété	le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse	la hauteur issue du sommet principal est aussi médiane, médiatrice, bissectrice - les angles à la base st égaux	Toute hauteur est aussi médiane, médiatrice, bissectrice les 3 angles sont égaux à 60°

VII Quadrilatères

1. Définitions

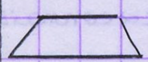
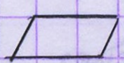
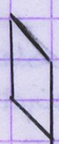
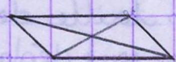
Polygone ayant 4 côtés.

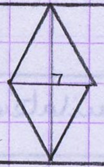
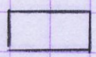


- ABCD = 4 sommets du quadrilatère
- [AB], [BC], [CD], [AD] 4 côtés
- [AB] et [BC] : côtés consécutifs
- [AB] et [CD] : côtés opposés
- [AC] et [BD] : diagonales

On nomme 1 quadrilatère en designant ses sommets en tournant sens d aiguilles (ou inverse)

2. Les Quadrilatères particuliers

Figures	Propriétés caracteristiques des cotés	Propriétés caracteristiques des diagonales	Propriétés caractéristik des angles	Autres propriétés caractéristiques
	Quadrilatère non croisé qui a 2 côtés parallèles - Trapèze isocèle : 2 cotés m̂ longueur		Trapèze rectangle a 2 angles droits	
 	Quadrilatère à 2 cotés opposés et // 2 à 2 - • Quadrilatère non croisé qui a 2 côtés opposés // et de m̂ longueur • Quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur	ses Diagonales ont le m̂ milieu 	Ses angles : • opposés st égaux • adjacents st complémentaires	

	Quadrilatère à 4 côtés de m̂ longr. Parallelogramme à 2 cotés consecutifs de m̂ longueur.	Diagonales ⊥ et ont le m̂ milieu		
		Diagonales de m̂ longueur et m̂ milieu • Parallelogramme.	4 angles droits	
	Rectangle qui a deux côtés consecutifs de m̂ longueur	Diagonales égales m̂ milieu et ⊥	losange qui a un angle droit	4 côtés de m̂ longueur et 4 angles droits

② Aspects didactiques

I. Qu'est ce que le savoir géometrique ?

1. Distinction entre l'espace physique et l'espace géométrique

Espace physique = celui qui nous entoure

Espace géometrique = modélisation de l'espace physique. Il se caractérise par sa dimension. Les objets st representés par des figures

2. Le S.G s'appuie sur des representations graphiques

Ces representations st les figures de la géometrie plane (droite, segment) et geométrie ds l'espace

Toute representat° d'un objet suppose 1 selection parmi les informations que ns possédons de cet objet

Ces informations sont de nature visuelle (ce que je vois) ou intellectuelle (ce que je sais sur cet objet)

Selon la nature du problème de géométrie, on fait référence à 3 problématiques :

- pbatique pratique : les objets sur lesquels on travaille st d'objets physiques.
- pbatique géométrique : les objets ne st pas d'objets physiques
- pbatique de modélisation : on travaille sur d objets physiques, la demarche s'appuie sur p... la pbatique

3. Le S.G est constitué de plusieurs systèmes signifiants

Un m̂ dessin peu representer des objets ≠.

SG s'appuie sur un langage specifique dt les mots st sut deja connu (hauteur, arc, rayon ...)

4. Le SG à l'école.

Cycle 1 et 2 : distinction entre activités de structurations de l'espace psik & connaissance de la géometrie non est nette

Cycle 3 : 4 types d'activités = Reproduire – Construire – Representer – Decrire

II Les principales compétences demandées aux élèves

Il faut d'abord distinguer les taille de l'espace   G. Brousseau

- micro-espace : objets ke l'on peut déplacer, manipuler, percevoir – Sujet extérieur à l'Espace
- méso-espace : objets fixes dt la taille est 0,5 à 50 x celle de l'enfant. Sujet ds l'Espace
- macro-espace : espace urbain, visions seulent locales. Sujet ds l'Espace

1. Reproduire - Construire - Representer.

Reproduire : réaliser une copie d'un objet (validat° par superposit° ac modèle)
Construire : l'objet à construire n'est pas présent, on a seulem+ sa description
Representer : l'objet peut ê present ou eloigné - Representat° à l'echelle 1 ou autre

- Reconnaissance de figures de bases
  - l'analyse de chaque partie de la figure necessite 1 effort non naturel
  - la reconnaissance d'1 figure est liée aux connaissances stockés ds la mémoire à long terme ss forme de figures prototypique
- Tracé des figures géométriques
  - competences manipulatoires (tenir règle et crayon, tracer 1trait)
  - visualiser la figure à l'avance (mobiliser des images mentales
  - connaissances mathématiques

Variables didactiques st importantes (ex : peut faire sur feuille quadrillée, juste tracé)
- taille de l'espace
- support : feuille blanche ou quadrillée
- instrument dispo : calque, règles, equerre, compas...
- specificité des objets à construire ou representer (taille, complexiT, orientat°...)
- proximité de la figure à reproduire (figure presente, eloignée, absente?)

2. Décrire.

La description d'une figure dépend du but visé et de(s) destinataire(s)
- Description pour faciliter son identification
  les critères st fonctions de la figure à identifiér et d caracteristiques d autres
- Description pour la representer ou la reproduire
  analyser la figure et communiquer les ≠ étapes de construct°

III les principales difficultés des élèves et leur analyse.

Piaget "representat° de l'espace chez l'enfant"

1. Difficultés liées aux connaissances spatiales

Les connaissances spatiales st liées à la structuration de l'espace par l'enfant
- les connaissances spatiales se forment de manière progressive.
- la construct° d connaissances spatio-géometrik se fait | interiorisat° d act° du sujet cad l'aptitude à penser les act° sans les executer

Les obstacles
- nbr insuffisant d'experiences vecues par l'élève
- l'élève vit essentiellem+ ds 1 monde de representat° (TV, jeux vidéos).

2. Difficultés liées aux representations des objets géométriques

- difficultés à prendre conscience que le tracé géométrique est un ensemble de points
- Ils ont du mal à faire la distinct° entre representat° d'1 droite et celle d'un segment (A est sur (d) ! d ×A)
- Certains ne reconnaissent pas que 2 droites ⊥ sont perpendiculaires

6.9

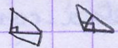
Obstacles = de nature épistémologique : connaissance en elle-m̃ difficile à assimiler.
de nature didactique - activités ds micro-espace st transposé aux représentat° grafik.
- l'enseignt s'appuie sur d pratiques ostensive où les connaissances sont présentées en supposant ke les élèves se les sont appropriées

Les limites de l'ostent° sont celles m̃ que celle de l'approche "transmissive" où behavioriste
- les élèves pensent que ts les objets géométriques, et leur représentat° ont 1 réalité physik
- les élèves peuvent ê amenés à se construire d représentat° erronées de certains concepts (ex : 2 droites ⊥ st forcémt horizontales + verticales).

3. Difficultés liées aux tâches de reproduction, représentation et construction de figures géométriques.

- Repérage des figures de base d'une figure complexe
  - l'élève n'a pas stocké d figures prototypiques, par manque d'expérience
  - les figures de base ne correspondent pas aux figures prototypiques
  - des figures de base trop prégnantes empêchent l'élève d'en voir d'autres
  - l'élève à du mal à isoler les figures de base des autres éléments

+ entre angles isolés et à reconfigurés.



- Repérage des sur-figures
  - l'élève ne reconnaît pas les figures qui ne st pas entièrement tracées
- Chronologie des tracés
- Exécution des tracés géométriques
  - difficultés de manipulation des instruments de tracé
  - difficultés à mobiliser d images mentales anticipatrices
  - non-connaissance des figures et de leur propriétés
  - conception incomplète d'un instrument (ex : compas : cercle + reporter d longueur)

4. Difficultés liées aux descriptions de figures.

- Vocabulaire : connaît certains mots, ms doit en paraphraser d'autres
- Connaissance des propriétés :
- Effort de décentration qu'oblige toute description : se mettre à la place de l'autre
- Codage des figures : bcp pensent qu'ils ne peuvent pas chger le dessin du maître (ex : ajout d 1 lettre)
- Sens que l'élève donne à l'activité de description
  - faut-il ê compris de son interlocuteur ? (vocabulaire adapté au récepteur)
  - faut-il démontrer ? voc ⊕ mathématiques, lister les figures.

IV Conclusion - cf ERMEL CE et CM

Quelles situations mettre en place pour aider les élèves à se créer des images mentales des figures de base ? > trouver des situations-problèmes

5° : difficultés liées aux tâches de construct° : - difficultés pr anticiper les tracés > pb d'images mentales
- diff pr mobiliser les ppt d objets à construire - " psychomotrice pr utiliser correctemt les instruments
- diff liées à 1 connaissance incomplète d instrumt (ex compas)

Les Propriétés à Connaître.

DROITES

- si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles st // entre elles.
- si deux droites sont perpendiculaires à une m̂ troisième,
- si A, B et C st trois pts tq (AB) et (AC) sont parallèles, alors A, B et C st alignés
- si deux droites sont // et si une troisième droite est ⊥ à l'une d'elles, alors elle est ⊥ à l'autre

CERCLE

- si un point M est sur un cercle de centre O et de rayon r, alors OM = r
- si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit
- si un point M est sur le cercle de diamètre [AB], alors (MA) est perpendiculaire à (MB)

MEDIATRICE

- si un point est équidistant des extremités d'un segment, alors il est sur la médiatrice du [...]
- si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extremités de ce segment
- si une droite est ⊥ à (AB) et passe par le milieu de [AB], alors c la médiatrice de [AB]
- si une droite est la médiatrice d'un segment [AB], alors elle est ⊥ à (AB) et passe / le milieu de [AB]
- si une droite contient 2 points équidistants de A et B, alors c la médiatrice de [AB]
- si une droite est ⊥ à (AB) et contient un point équidistant de A et B, alors c la médiatrice de [AB]

PARALLELOGRAMME

- si un quadrilatère a des côtés opposés // 2 à 2, alors c'est 1 parallélogramme.
- si un quadrilatère est 1 parallélogramme, alors ses côtés opposés st // deux à deux
- si un quadrilatère a des diagonales ki ont le m̂ milieu alors c'est un parallélogramme
- si un quadrilatère est 1 parallélogramme, alors ses diagonales ont même milieu
- si un quadrilatère est 1 parallélogramme, alors ses côtés opposés st de m̂ longueur 2 à 2.
- si un quadrilatère non croisé a 2 côtés opposés de m̂ longueur et //, alors c 1 parallélogramme

LOSANGE

- si un quadrilatère a quatre côtés égaux alors c'est un losange.
- si un quadrilatère est un losange, alors il a quatre côtés de m̂ longueur.
- si un quadrilatère a des diagonales ⊥ et qui ont le m̂ milieu, alors c'est un losange.
- si un quadrilatère est un losange, alors il a des diagonales ⊥ et qui ont le m̂ milieu.

RECTANGLE

- si un quadrilatère a trois angles droits, alors, c'est un rectangle
- si un quadrilatère est un rectangle alors il a 4 angles droits
- si un quadrilatère a des diagonales de m̂ longueur et ki ont le m̂ milieu, alors c 1 rectangle
- si un quadrilatère est un rectangle alors il a des diagonales de m̂ longueur et ki ont le m̂ milieu.

CARRE

- si un quadrilatère a quatre côtés de m̂ longueur et un angle droit, alors c'est un carré
- si un quadrilatère est un carré, alors, il a 4 angles droits et 4 côtés de m̂ longueur
- si un quadrilatère a des diagonales de m̂ longueur ⊥ et qui ont m̂ milieu, alors c 1 carré
- si un quadrilatère est un carré, alors il a des diagonales de m̂ longueur ⊥ et ki ont m̂ milieu

1 TRIANGLE

- dans un triangle, la longueur d'un côté est strictem^t $<$ à la somme des longueurs d 2 otres coT
- si ds 1 triangle 1 droite passe par le milieu d'1 coT et est // à 1 deuxième coT, alors elle coupe la 3^e en son milieu
- si un triangle est rectangle, alors la somme d carrés des coT de l'∟ = au carré de l'hypoténuse
- si ds 1 triangle ABC on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors le triangle est rectangle en A.
- Théorème de Thalès ds le triangle (cf Ch8) et sa réciproque.
- si ds 1 triangle (ABC) 1 droite passe par les milieux (M et N) de 2 cotés [AB] et [BC], alors elle est // au troisième (BC), de plus $MN = 1/2\, BC$ (théorème de la droite des milieux).

ANGLE

- dans un triangle, la somme des angles est égale à 180°.
- si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils sont égaux
- si 2 angles st alternes-internes formés à partir de droites //, alors ils sont égaux.
- si 2 angles st correspondants formés à partir de droites parallèles, alors ils st égaux
- si un triangle ABC est isocèle ~~alo~~ en A, alors $\hat{B} = \hat{C}$.
- si un triangle est équilatéral alors il a trois angles égaux à 60°
- si $\widehat{BAC} = 180°$ alors A, B, C sont alignés
- si 1 triangle a 3 / 2 angles égaux alors il est équilatéral / isocèle

ANGLE et CERCLE

- si un angle au centre et un angle inscrit interceptent le m̂ arc, alors, la mesure de l'angle au centre est double de celle de l'angle inscrit
- si deux angles inscrits interceptent le m̂ arc, alors ils st égaux

SYMETRIE (cf Ch9)

- si 2 segments sont symétriques par rap. à 1 axe ou à 1 pt, alors, ils st de m̂ longueur
- si 2 angles sont symétriques, alors ils st égaux

cf faire fich e Pr démontrer ke 2 dte st ⊥

on peut utiliser les propriétés:	à condit° d'avoir
M4	médiatrice

- 2 dte st //
- 1 dte é la médiatrice d'1 segm^t
- démontrer k 1 pt é le milieu d'1 segm^t
- démontrer ke 2 longueurs st égales
- démontrer ke 2 angles st égaux
- ke 3 pt st alignés
- calculer la longueur d'1 segm^t